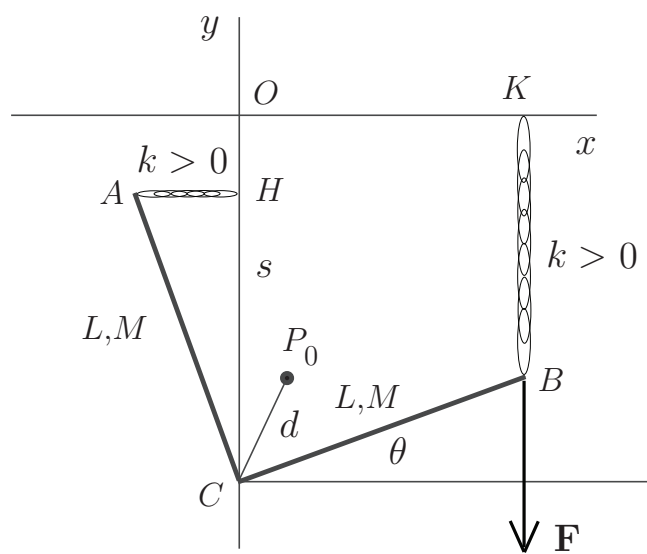


1. Un corpo rigido piano è formato da due aste AC e BC , di ugual massa M e lunghezza L , saldate ad angolo retto nell'estremo comune C . La figura si muove nel piano verticale $O(x, y)$, con il punto C libero di scorrere senza attrito sull'asse y e la figura è libera di ruotare attorno a C . Infine, due molle di ugual costante $k > 0$ collegano gli estremi A e B con le loro proiezioni ortogonali H e K rispettivamente sull'asse y e sull'asse x . Una forza costante di modulo F agisce inoltre sul punto B , diretta parallelamente all'asse y e rivolta verso il basso. Scegliendo quali coordinate lagrangiane i parametri s (la distanza con segno di C da O considerata positiva quando C sta sotto di O) e θ (l'angolo che l'asta CB forma con la direzione orizzontale) come indicati in figura, si chiede di:

- scrivere le posizioni di A , B e C in funzione di s e θ ;
- scrivere l'espressione vettoriale di tutte le forze agenti sul sistema, specificandone il punto di applicazione;
- scrivere le forze generalizzate di Lagrange;
- determinare le configurazioni di equilibrio utilizzando le forze generalizzate di Lagrange;
- determinare le reazioni vincolari nelle configurazioni di equilibrio mediante le equazioni cardinali della statica.



Svolgimento. Coordinate dei punti:

$$\begin{aligned}
 C - O &= -s \hat{\mathbf{j}} \\
 A - O &= A - C + C - O = L \left(-\hat{\mathbf{i}} \sin \theta + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta \right) - s \hat{\mathbf{j}} \\
 B - O &= B - C + C - O = L \left(\hat{\mathbf{i}} \cos \theta + \hat{\mathbf{j}} \sin \theta \right) - s \hat{\mathbf{j}} \\
 P_0 - O &= P_0 - C + C - O = d \left[\hat{\mathbf{i}} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) + \hat{\mathbf{j}} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) \right] - s \hat{\mathbf{j}} = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} d \left[\hat{\mathbf{i}} (\cos \theta - \sin \theta) + \hat{\mathbf{j}} (\sin \theta + \cos \theta) \right] - s \hat{\mathbf{j}}
 \end{aligned}$$

dove d è la distanza di P_0 da C ed è uguale a

$$d = \frac{L \sqrt{2}}{4}$$

Forze applicate al sistema:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{kA} &= k L \hat{\mathbf{i}} \sin \theta \quad \text{forza elastica applicata al punto } A \\
 \mathbf{F}_{kB} &= k (s - L \sin \theta) \hat{\mathbf{j}} \quad \text{forza elastica applicata al punto } B \\
 \mathbf{F}_B &= -F \hat{\mathbf{j}} \quad \text{forza costante applicata al punto } B \\
 \mathbf{F}_p &= -2 M g \hat{\mathbf{j}} \quad \text{forza peso applicata al centro di massa } P_0 \\
 \Phi &= \Phi \hat{\mathbf{i}} \quad \text{reazione vincolare applicata al punto } C
 \end{aligned}$$

Forze generalizzate di Lagrange:

$$\begin{aligned}
 Q_s &= \mathbf{F}_{kA} \cdot \frac{\partial A}{\partial s} + (\mathbf{F}_{kB} + \mathbf{F}_B) \cdot \frac{\partial B}{\partial s} + \mathbf{F}_p \cdot \frac{\partial P_0}{\partial s} = \\
 &= k L \hat{\mathbf{i}} \sin \theta \cdot (-\hat{\mathbf{j}}) + [k (s - L \sin \theta) \hat{\mathbf{j}} - F \hat{\mathbf{j}}] \cdot (-\hat{\mathbf{j}}) + (-2 M g \hat{\mathbf{j}}) \cdot (-\hat{\mathbf{j}}) = \\
 &= F - k (s - L \sin \theta) + 2 M g \\
 Q_\theta &= \mathbf{F}_{kA} \cdot \frac{\partial A}{\partial \theta} + (\mathbf{F}_{kB} + \mathbf{F}_B) \cdot \frac{\partial B}{\partial \theta} + \mathbf{F}_p \cdot \frac{\partial P_0}{\partial \theta} = \\
 &= k L \hat{\mathbf{i}} \sin \theta \cdot [L (-\hat{\mathbf{i}} \cos \theta - \hat{\mathbf{j}} \sin \theta)] + [k (s - L \sin \theta) \hat{\mathbf{j}} - F \hat{\mathbf{j}}] \cdot [L (-\hat{\mathbf{i}} \sin \theta + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta)] + \\
 &+ (-2 M g \hat{\mathbf{j}}) \cdot \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} d [\hat{\mathbf{i}} (-\sin \theta - \cos \theta) + \hat{\mathbf{j}} (\cos \theta - \sin \theta)] \right\} = \\
 &= -k L^2 \sin \theta \cos \theta + [k (s - L \sin \theta) - F] L \cos \theta - M g d \sqrt{2} (\cos \theta - \sin \theta)
 \end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{aligned}
 Q_s &= 0 \\
 Q_\theta &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F - k (s - L \sin \theta) + 2 M g &= 0 \\
 -k L^2 \sin \theta \cos \theta + [k (s - L \sin \theta) - F] L \cos \theta - M g d \sqrt{2} (\cos \theta - \sin \theta) &= 0
 \end{aligned}$$

Dalla prima equazione ricaviamo

$$k (s - L \sin \theta) - F = 2 M g$$

che, sostituita nella seconda, dà

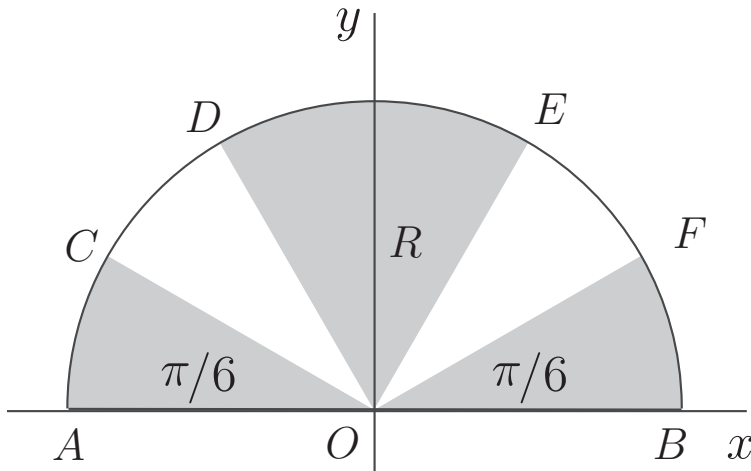
$$-k L^2 \sin \theta \cos \theta + 2 M g L \cos \theta - M g d \sqrt{2} (\cos \theta - \sin \theta) = 0$$

Sostituendo il valore di d e semplificando otteniamo

$$M g (3 \cos \theta + \sin \theta) - 2 k L \sin \theta \cos \theta = 0$$

Si tratta di un'equazione trigonometrica che non si riesce a risolvere a mano. Ovviamente, se qualcuno fosse arrivato correttamente fino a questo punto avrei dato punteggio pieno all'esercizio.

2. Una lamina piana di massa $m + M$ è costituita da un semi-disco di centro O e raggio R privato di due settori circolari OCD e OEF ed apertura $\pi/6$, con gli angoli $\widehat{OFB} = \widehat{OAC} = \pi/6$. Il contorno della lamina, che rimane intero, abbia massa m e la parte interna massa M . Calcolare la matrice d'inerzia della lamina nel sistema $O(x, y, z)$ mostrato in figura, con l'asse z perpendicolare al piano della figura.



Svolgimento. Dalle simmetrie della figura si vede subito che la terna proposta è principale d'inerzia, quindi non occorre perdere tempo con I_{12} come qualcuno ha fatto. Dunque, $I_{12} = 0$. Inoltre, $I_{33} = I_{11} + I_{22}$ perchè la figura è piana. Inoltre, sempre per le simmetrie, sia per I_{11} che per I_{22} il contributo del quarto di cerchio di destra e di quello di sinistra sono uguali. Ancora: il contorno è una figura monodimensionale, la parte interna è bidimensionale; i loro contributi vanno quindi calcolati separatamente e sommati solo alla fine. La densità del contorno, μ , è una densità lineare, quella della parte interna, σ , è superficiale. Abbiamo:

$$\sigma = \frac{M}{2\pi R^2/3} = \frac{3M}{2\pi R^2}$$

$$\mu = \frac{m}{\pi R + 2R} = \frac{m}{R(\pi + 2)}$$

Parte interna. Notiamo che, per la parte interna, abbiamo $I_{11} = I_{22}$. Usiamo la proprietà additiva della massa; indichiamo con M_1 la massa del semicerchio pieno e con M_2 la massa della parte vuota, e con D_1 il dominio del semicerchio pieno e D_2 il dominio della parte vuota. Abbiamo

$$M_1 - M_2 = M$$

$$\frac{M_1}{M_2} = 3$$

e quindi

$$M_1 = \frac{3}{2}M \quad M_2 = \frac{1}{2}M$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \sigma \int_{D_1} y^2 dm - \sigma \int_{D_2} y^2 dm = \\
 &= 2\sigma \left\{ \int_0^R \int_0^{\pi/2} (r \sin \theta)^2 r dr d\theta - \int_0^R \int_{\pi/6}^{\pi/3} (r \sin \theta)^2 r dr d\theta \right\} = \\
 &= 2\sigma \left\{ \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta - \int_0^R r^3 dr \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^2 \theta d\theta \right\}
 \end{aligned}$$

Sappiamo che

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4},$$

mentre l'altro integrale va calcolato:

$$\begin{aligned}
 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^2 \theta d\theta &= - \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin \theta d(\cos \theta) = - [\sin \theta \cos \theta]_{\pi/6}^{\pi/3} + \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 \theta d\theta = \\
 &= \text{zero} + \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - \sin^2 \theta) d\theta = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) - \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^2 \theta d\theta
 \end{aligned}$$

da cui

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{12}$$

Dunque

$$I_{11} = 2\sigma \frac{R^4}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \right) = \sigma \frac{\pi R^4}{12} = \frac{1}{8} M R^2 = I_{22}$$

Contorno. Il contorno è costituito dalla semicirconferenza e dal diametro. Il diametro non contribuisce ad I_{11} mentre $I_{22} = I_{11}$ per la semicirconferenza. Abbiamo:

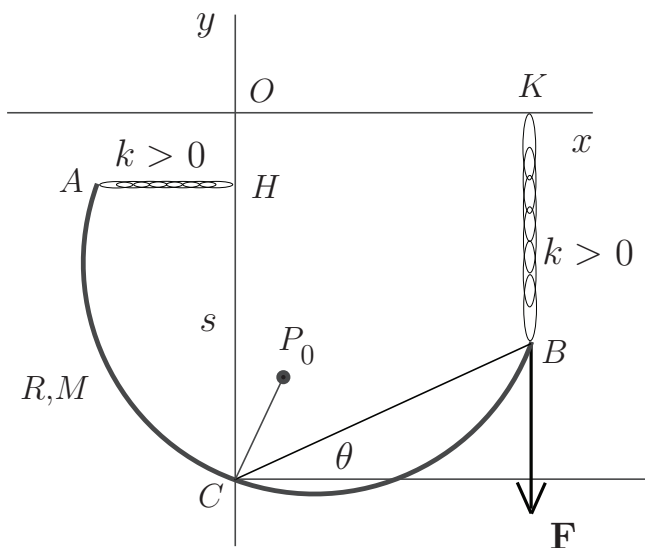
$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \mu \int_0^\pi y^2 R d\theta = \mu R \int_0^\pi (R \sin \theta)^2 d\theta = \mu R^3 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\pi+2} \frac{1}{2} m R^2 \\
 I_{22} &= \frac{\pi}{\pi+2} \frac{1}{2} m R^2 + \mu \int_{-R}^R x^2 dx = \frac{\pi}{\pi+2} \frac{1}{2} m R^2 + \mu \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \\
 &= \frac{\pi}{\pi+2} \frac{1}{2} m R^2 + \frac{m}{R(\pi+2)} 2 \frac{R^3}{3} = \frac{\pi}{\pi+2} \frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{\pi+2} \frac{2}{3} m R^2 = \\
 &= \frac{1}{\pi+2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \right) m R^2
 \end{aligned}$$

Totale.

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \frac{1}{8} M R^2 + \frac{\pi}{\pi+2} \frac{1}{2} m R^2 \\
 I_{22} &= \frac{1}{8} M R^2 + \frac{1}{\pi+2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \right) m R^2 \\
 I_{33} &= I_{11} + I_{22} \\
 I_{12} &= I_{13} = I_{23} = 0
 \end{aligned}$$

1. Una semicirconfenza AB , di massa M e raggio R , si muove nel piano verticale $O(x, y)$, con il punto medio dell'arco C libero di scorrere senza attrito sull'asse y e la figura libera di ruotare attorno a C . Infine, due molle di ugual costante $k > 0$ collegano gli estremi A e B con le loro proiezioni ortogonali H e K rispettivamente sull'asse y e sull'asse x . Una forza costante di modulo F agisce inoltre sul punto B , diretta parallelamente all'asse y e rivolta verso il basso. Scegliendo quali coordinate lagrangiane i parametri s (la distanza con segno di C da O considerata positiva quando C sta sotto di O) e θ (l'angolo che la corda BC forma con la direzione orizzontale) come indicati in figura, si chiede di:

- scrivere le posizioni di A , B e C in funzione di s e θ ;
- scrivere l'espressione vettoriale di tutte le forze agenti sul sistema, specificandone il punto di applicazione;
- scrivere le forze generalizzate di Lagrange;
- determinare le configurazioni di equilibrio utilizzando le forze generalizzate di Lagrange;
- determinare le reazioni vincolari nelle configurazioni di equilibrio mediante le equazioni cardinali della statica.



Svolgimento. Notando che $\overline{AC} = \overline{BC} = R\sqrt{2} \equiv L$, abbiamo per le coordinate dei punti:

$$\begin{aligned} C - O &= -s\hat{\mathbf{j}} \\ A - O &= A - C + C - O = L \left(-\hat{\mathbf{i}} \sin \theta + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta \right) - s\hat{\mathbf{j}} \\ B - O &= B - C + C - O = L \left(\hat{\mathbf{i}} \cos \theta + \hat{\mathbf{j}} \sin \theta \right) - s\hat{\mathbf{j}} \\ P_0 - O &= P_0 - C + C - O = d \left[\hat{\mathbf{i}} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) + \hat{\mathbf{j}} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) \right] - s\hat{\mathbf{j}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} d \left[\hat{\mathbf{i}} (\cos \theta - \sin \theta) + \hat{\mathbf{j}} (\sin \theta + \cos \theta) \right] - s\hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

dove d è la distanza di P_0 da C ed è uguale a

$$d = R - \frac{2R}{\pi}$$

Forze applicate al sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{kA} &= kL\hat{\mathbf{i}} \sin \theta \quad \text{forza elastica applicata al punto } A \\ \mathbf{F}_{kB} &= k(s - L \sin \theta)\hat{\mathbf{j}} \quad \text{forza elastica applicata al punto } B \\ \mathbf{F}_B &= -F\hat{\mathbf{j}} \quad \text{forza costante applicata al punto } B \\ \mathbf{F}_p &= -Mg\hat{\mathbf{j}} \quad \text{forza peso applicata al centro di massa } P_0 \end{aligned}$$

Forze generalizzate di Lagrange:

$$\begin{aligned} Q_s &= \mathbf{F}_{kA} \cdot \frac{\partial A}{\partial s} + (\mathbf{F}_{kB} + \mathbf{F}_B) \cdot \frac{\partial B}{\partial s} + \mathbf{F}_p \cdot \frac{\partial P_0}{\partial s} = \\ &= kL\hat{\mathbf{i}} \sin \theta \cdot (-\hat{\mathbf{j}}) + [k(s - L \sin \theta)\hat{\mathbf{j}} - F\hat{\mathbf{j}}] \cdot (-\hat{\mathbf{j}}) + (-Mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot (-\hat{\mathbf{j}}) = \\ &= F - k(s - L \sin \theta) + Mg \\ Q_\theta &= \mathbf{F}_{kA} \cdot \frac{\partial A}{\partial \theta} + (\mathbf{F}_{kB} + \mathbf{F}_B) \cdot \frac{\partial B}{\partial \theta} + \mathbf{F}_p \cdot \frac{\partial P_0}{\partial \theta} = \\ &= kL\hat{\mathbf{i}} \sin \theta \cdot [L(-\hat{\mathbf{i}} \cos \theta - \hat{\mathbf{j}} \sin \theta)] + [k(s - L \sin \theta)\hat{\mathbf{j}} - F\hat{\mathbf{j}}] \cdot [L(-\hat{\mathbf{i}} \sin \theta + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta)] + \\ &+ (-Mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} d [\hat{\mathbf{i}} (-\sin \theta - \cos \theta) + \hat{\mathbf{j}} (\cos \theta - \sin \theta)] \right\} = \\ &= -kL^2 \sin \theta \cos \theta + [k(s - L \sin \theta) - F]L \cos \theta - Mg d \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \theta - \sin \theta) \end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} Q_s &= 0 \\ Q_\theta &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F - k(s - L \sin \theta) + Mg &= 0 \\ -kL^2 \sin \theta \cos \theta + [k(s - L \sin \theta) - F]L \cos \theta - Mg d \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \theta - \sin \theta) &= 0 \end{aligned}$$

Dalla prima equazione ricaviamo

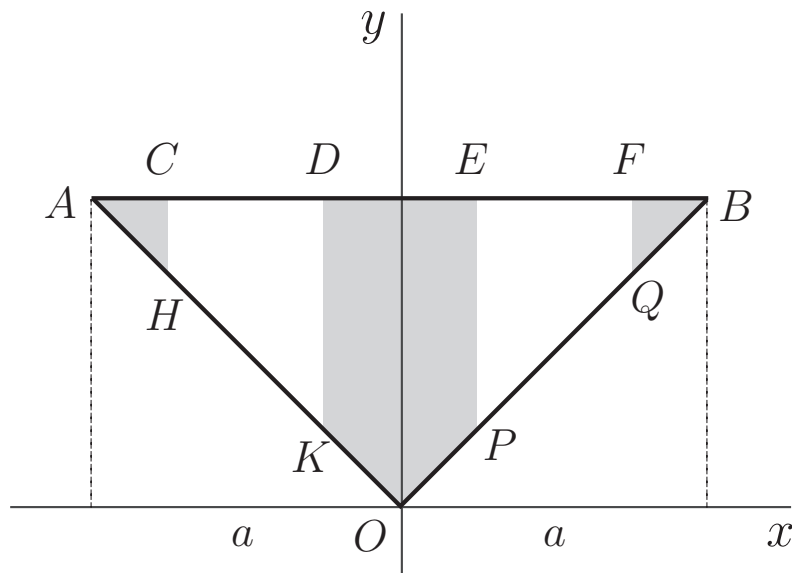
$$k(s - L \sin \theta) - F = Mg$$

che, sostituita nella seconda, dà

$$-k L^2 \sin \theta \cos \theta + M g L \cos \theta - M g d \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \theta - \sin \theta) = 0$$

Si tratta di un'equazione trigonometrica che non si riesce a risolvere a mano. Ovviamente, se qualcuno fosse arrivato correttamente fino a questo punto avrei dato punteggio pieno all'esercizio.

2. Una lamina piana di massa $m + M$ è costituita da un triangolo rettangolo isoscele OAB di base $2a$, privato di due settori trapezoidali $CDHK$ e $EFPQ$ aventi i lati CH , DK , EP e FQ perpendicolari alla base, con $CD = DE = EF = a/2$. Il contorno della lamina, che rimane intero, abbia massa m e la parte interna massa M . Calcolare la matrice d'inerzia della lamina nel sistema $O(x, y, z)$ mostrato in figura, con l'asse x parallelo alla base e l'asse z perpendicolare al piano della figura.



Svolgimento. Dalle simmetrie della figura si vede subito che la terna proposta è principale d'inerzia, quindi non occorre perdere tempo con I_{12} come qualcuno ha fatto. Dunque, $I_{12} = 0$. Inoltre, $I_{33} = I_{11} + I_{22}$ perchè la figura è piana. Inoltre, sempre per le simmetrie, sia per I_{11} che per I_{22} il contributo della metà di destra è uguale a quello di sinistra. Ancora: il contorno è una figura monodimensionale, la parte interna è bidimensionale; i loro contributi vanno quindi calcolati separatamente e sommati solo alla fine. La densità del contorno, μ , è una densità lineare, quella della parte interna, σ , è superficiale. L'area del triangolo pieno è a^2 ; l'area di ciascun trapezio vuoto è $a^2/4$. Abbiamo:

$$\sigma = \frac{M}{a^2/2} = \frac{2M}{a^2}$$

$$\mu = \frac{m}{2a + 2a\sqrt{2}} = \frac{m}{2a(1 + \sqrt{2})}$$

Parte interna. Usiamo la proprietà additiva della massa; indichiamo con M_1 la massa del triangolo pieno e con M_2 la massa della parte vuota, e con D_1 il dominio del semicerchio pieno e D_2 il dominio della parte vuota. Abbiamo

$$M_1 - M_2 = M$$

$$\frac{M_1}{M_2} = 2$$

e quindi

$$M_1 = 2M \quad M_2 = M$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \sigma \int_{D_1} y^2 dm - \sigma \int_{D_2} y^2 dm = \\
 &= 2\sigma \left\{ \int_0^a \int_x^a y^2 dx dy - \int_{a/4}^{3a/4} \int_x^a y^2 dx dy \right\} = \\
 &= 2\sigma \left\{ \int_0^a \frac{a^3 - x^3}{3} dx - \int_{a/4}^{3a/4} \frac{a^3 - x^3}{3} dx \right\} = \\
 &= 2\sigma \left\{ \left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{12} \right) - \left(\frac{a^4}{6} - \frac{5a^4}{192} \right) \right\} = \frac{7}{16} M a^2 \\
 I_{22} &= \sigma \int_{D_1} x^2 dm - \sigma \int_{D_2} x^2 dm = \\
 &= 2\sigma \left\{ \int_0^a \int_x^a x^2 dx dy - \int_{a/4}^{3a/4} \int_x^a x^2 dx dy \right\} = \\
 &= 2\sigma \left\{ \int_0^a x^2 (a - x) dx - \int_{a/4}^{3a/4} x^2 (a - x) dx \right\} = \\
 &= 2\sigma \left\{ \frac{a^4}{12} - \frac{11a^4}{192} \right\} = \frac{5}{96} \sigma a^4 = \frac{5}{48} M a^2
 \end{aligned}$$

Contorno. Il contorno è costituito dai due lati obliqui e dal lato parallelo all'asse x . È ovvio che $I_{22} = I_{11}$ per i due lati obliqui e che $I_{11} = m_{AB} a^2$ per il lato AB . Inoltre

$$\begin{aligned}
 \overline{AB} &= 2a & \overline{AO} &= \overline{OB} = a\sqrt{2} \\
 m_{AB} &= 2\mu a & m_{OA} &= m_{OB} = \mu a\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi (indicando con l una variabile d'integrazione che corre lungo il lato OB):

$$\begin{aligned}
 I_{11}^{AB} &= m_{AB} a^2 = 2\mu a^3 \\
 I_{22}^{AB} &= \mu \int_{-a}^a x^2 dx = 2\mu \frac{a^3}{3} \\
 I_{11}^{OB} &= I_{11}^{OA} = I_{22}^{OB} = I_{22}^{OA} = \mu \int_0^{a\sqrt{2}} y^2 dl = \mu \int_0^{a\sqrt{2}} \left(l \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 dl = \mu \frac{(a\sqrt{2})^3}{6}.
 \end{aligned}$$

Complessivamente:

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= 2\mu a^3 + 2\mu \frac{(a\sqrt{2})^3}{6} = 2\mu a^3 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{3 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \frac{1}{3} m a^2 \\
 I_{22} &= 2\mu \frac{a^3}{3} + 2\mu \frac{(a\sqrt{2})^3}{6} = 2\mu a^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{1}{3} m a^2
 \end{aligned}$$

Totale.

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \frac{7}{16} M a^2 + \frac{3 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \frac{1}{3} m a^2 \\
 I_{22} &= \frac{5}{48} M a^2 + \frac{1}{3} m a^2 \\
 I_{33} &= I_{11} + I_{22} \\
 I_{12} &= I_{13} = I_{23} = 0
 \end{aligned}$$

